Страхиња Радић

Формуле из Вероватноће и статистике

[верзија 1.2 од 10.05.2010.]

ОСНОВНЕ ФОРМУЛЕ ИЗРАЧУНАВАЊА ВЕРОВАТНОЋА

$\boxed{1^\circ}$
$$\boxed{\begin{aligned}&P(A_1A_2\cdots A_n)=\\&\quad=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})\end{aligned}}$$
[формула множења]

$\boxed{2^\circ}$
$$\boxed{\begin{aligned}&P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\\&\quad=p_1-p_2+\ldots+(-1)^{n-1}p_n,\end{aligned}}$$
где је $p_k=\sum\limits_{i_1=1}^{n-k+1}\cdots\sum\limits_{i_k=i_{k-1}+1}^{n}P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})$.
[формула сабирања]

$\boxed{3^\circ}$ $A\subset H_1\cup\ldots\cup H_n \implies$
$$\implies \boxed{P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P(A|H_k)}$$
[формула потпуне вероватноће]

$\boxed{4^\circ}$ $A\subset H_1\cup\ldots\cup H_n \implies$
$$\implies \boxed{P(H_i|A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P(A|H_k)}}$$
[формула Бајеса]

НУМЕРИЧКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

- Математичко очекивање СВ X (средња/просечна вредност СВ)

[x_k — вредности које узима СВ X, p_k — вероватноће $P\{X=x_k\}$]

$$\boxed{EX\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{n}x_kp_k}$$

Особине:

$\boxed{1^\circ}$ $E(aX)=a\cdot EX,\quad a=\text{const}$

$\boxed{2^\circ}$ $X,\ Y$ независне $\implies$
$\implies E(XY)=EX\cdot EY$

$\boxed{3^\circ}$ $E(X+Y)=EX+EY$

- Дисперзија (распрострањеност) СВ X

$$\boxed{DX\overset{\text{def}}{=}E(X-EX)^2=EX^2-E^2X}$$

Особине:

$\boxed{1^\circ}$ $Da=0,\quad a=\text{const}$

$\boxed{2^\circ}$ $D(aX)=a^2\cdot DX,\quad a=\text{const}$

$\boxed{3^\circ}$ $X,\ Y$ независне $\implies$
$\implies D(X+Y)=DX+DY$

- Стандардна девијација (одступање)

$$\boxed{\sigma(X)\overset{\text{def}}{=}\sqrt{DX}=\sqrt{EX^2-E^2X}}$$

- Коваријација

$$\boxed{\begin{aligned}&\operatorname{cov}(X,Y)\overset{\text{def}}{=}E\big[(X-EX)(Y-EY)\big]=\\&\qquad=E(XY)-EX\cdot EY\\&\operatorname{cov}(X,X)\overset{\text{def}}{=}DX\end{aligned}}$$

- Коефицијент корелације

$\left[\xi=\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},\quad \eta=\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right]$;

$$\boxed{\begin{aligned}&\rho(X,Y)\overset{\text{def}}{=}\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\\&\quad=\frac{E(XY)-EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma X\cdot\sigma Y}\end{aligned}}$$

РАСПОДЕЛЕ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

• Дискретне СВ

$\boxed{1^\circ}$ *Хипергеометријска:*

$$\boxed{P\{X=m\}=\frac{\binom{M}{n}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}}$$

$\boxed{2^\circ}$ *Биномна:* $[X \sim \mathrm{Bi}(n,p)]$

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$
$$EX=np, \qquad DX=npq$$

$\boxed{3^\circ}$ *Поасонова:* $[X \sim \Pi(\lambda)]$

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
$$EX=\lambda, \qquad DX=\lambda$$

$\boxed{4^\circ}$ *Геометријска:*

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}\cdot p$$
$$EX=1/p$$

• Апсолутно непрекидне СВ

$\boxed{1^\circ}$ *Равномерна (униформна):* $[X \sim R[a,b] \equiv U[a,b]]$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

$$EX=\frac{a+b}{2}, \qquad DX=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

$\boxed{2^\circ}$ *Нормална (Гаусова):* $[X \sim N(m,\sigma^2)]$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x>0;$$
$$EX=m, \qquad DX=\sigma^2.$$

$\boxed{3^\circ}$ *Експоненцијална:* $[X \sim E(\lambda)]$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\lambda}{e^{\lambda x}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$
$$EX=1/\lambda, \qquad DX=1/\lambda^2.$$

$\boxed{4^\circ}$ *Кошијева (са параметром $\alpha>0$):*

$$\boxed{f(x)=\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)},} \qquad x>0$$

$\boxed{5^\circ}$ *Гама-расподела (са параметрима $\alpha>0$ и $\lambda>0$):*

$$\boxed{f(x)=\frac{X^{\alpha-1}\lambda^\alpha e^{-\lambda X}}{\Gamma}(\alpha),} \qquad x>0$$

Густина расподеле: функција $f(x)$, таква да је

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=P\{X\leqslant x\}.}$$

Својства:

$\boxed{1^\circ}$ $f(x)\geqslant 0$

$\boxed{2^\circ}$ $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=F(\infty)=1$

$\boxed{3^\circ}$ $P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}t$

$\boxed{4^\circ}$ $F'(x)=f(x)$

Очекивање апсолутно непрекидне СВ:

$$\boxed{EX\stackrel{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x}$$

Функција расподеле стандардне нормалне СВ ($X\sim N(0,1)$):

$$\boxed{\Phi(y)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=\Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big)=F(x)}$$

Функција Лапласа:

$$\boxed{\Phi_0(y)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{y}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=\Phi(y)-\frac{1}{2}}$$

Особине:

$$\Phi_0(-y)=-\Phi_0(y)$$
$$\Phi(-y)=1-\Phi(y)$$

АПРОКСИМАЦИЈЕ БИНОМНЕ РАСПОДЕЛЕ

Посматра се $EX = np$:

$\boxed{1^\circ}$ $\boxed{np < 10}$ $(n \to +\infty,\ p \to 0,\ np < +\infty)$ — Теорема Поасона:

$$\boxed{\begin{aligned} P\{X = k\} &\approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ P\{a \leqslant X \leqslant b\} &\approx \sum_{k=a}^{b} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &[\lambda = np] \end{aligned}}$$

$\boxed{2^\circ}$ $\boxed{np > 10}$ $(n \to +\infty,\ p \in (0,1))$ — Теорема Моавра–Лапласа:

$\boxed{\text{а.)}}$ локална: $\left(-\infty < a \leqslant \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leqslant b < +\infty\right)$

$$\boxed{P\{X = k\} \approx \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right\}}$$

$\boxed{\text{б.)}}$ интегрална:

$$\boxed{\begin{aligned} P\{a \leqslant X \leqslant b\} &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}}$$

ГУСТИНА РАСПОДЕЛЕ СЛУЧАЈНОГ ВЕКТОРА

Нека је

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1,\ \dots,\ x_n), \\ \quad\vdots \\ y_n = g_n(x_1,\ \dots,\ x_n); \end{cases} \qquad J_{g^{-1}} \overset{\text{def}}{=} \left|(x_i)'_{y_j}\right|_{i,j=1}^{n} \neq 0;$$

Густина расподеле вероватноће сл. век. $(X_1, \dots, X_n) \in A$ је функција $f(x_1, \dots, x_n) = f_X$, таква да је

$\boxed{1^\circ}$ $f(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$,

$\boxed{2^\circ}$ $\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n} f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots\, \mathrm{d}x_n = 1.$

Аналогно, $f_Y(y_1, \dots, y_n)$ за $(Y_1, \dots, Y_n) \in B$.

Важи:

$$\boxed{\begin{aligned} P\{X \in A\} &= \int_A f_X(x_1,\ \dots,\ x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots\, \mathrm{d}x_n = \\ &= \int_B f_X(x_1,\ \dots,\ x_n) \cdot |J_{g^{-1}}|\,\mathrm{d}y_1 \dots\, \mathrm{d}y_n = \\ &= P\{Y \in B\} \end{aligned}}$$

Функција расподеле вероватноће сл. век.:

$$\boxed{\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t,s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\ f(x,y) &= F''_{xy}(x,y) \end{aligned}}$$

Маргиналне густине расподела:

$$\boxed{\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \end{aligned}}$$

Маргиналне расподеле сл. век.:

$$\boxed{\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ F_Y(y) &= \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(t,s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \end{aligned}}$$

СЛУЧАЈНО ЛУТАЊЕ НА ПРАВОЈ

• Симетрично $[p = 1/2]$

$X_k : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $p_m \stackrel{\text{def}}{=} P\{S_n = m\}$;

$\boxed{1^\circ}$ $n = 2m,\ m \in \mathbf{N}$

$$\boxed{p_{2m} = P\{S_{2m} = 2k\} = \binom{2m}{m+k}\frac{1}{2^{2m}}}$$

$\boxed{2^\circ}$ $n = 2m-1,\ m \in \mathbf{N}$

$$\boxed{p_{2m-1} = P\{S_{2m-1} = 2k-1\} = \binom{2m-1}{m+k-1}\frac{1}{2^{2m-1}}}$$

• Несиметрично $[p \neq 1/2]$

$X_k : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $q \stackrel{\text{def}}{=} 1 - p$;

$$\boxed{\begin{aligned} p_n &= P\{S_k = n\} = \begin{cases} \left(\frac{p}{1-p}\right)^n, & 0 \leqslant p < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < p \leqslant 1. \end{cases} \\ q_n &= P\{S_k = -n\} = \begin{cases} \left(\frac{1-p}{p}\right)^n, & \frac{1}{2} < p \leqslant 1, \\ 1, & 0 \leqslant p < \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}}$$

КАРАКТЕРИСТИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

• Основни појмови

Функција $\varphi_X : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, дефинисана са

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E(e^{\mathrm{i}tX}) && [\text{општи случај}] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}tX}\,\mathrm{d}F(x) && [\text{непрекидна СВ}] \end{aligned}}$$

се назива *карактеристичном функцијом* СВ X. Из $\mathrm{d}F(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)\,\mathrm{d}x$ следи:

$$\boxed{\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}tX} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

• Метод карактеристичних функција

$$\boxed{\begin{aligned} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{F}} X &\implies \varphi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t) \\ \varphi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t) \wedge \varphi \in \mathscr{C}(0) &\implies X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{F}} X \end{aligned}}$$

• Својства

$\boxed{1^\circ}$ $\left|\varphi_X(t)\right| \leqslant \varphi_X(0) = 1$

$\boxed{2^\circ}$ $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$

$\boxed{3^\circ}$ φ је равномерно непрекидна по t

$\boxed{4^\circ}$ $X_1, \ldots, X_n$ су независне СВ $\implies$
$\implies \varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t)$

$\boxed{5^\circ}$ $\varphi_X \equiv \varphi_Y \implies F_X \equiv F_Y$

$\boxed{6^\circ}$ $E|X|^n < +\infty, \quad n \in \mathbf{N} \implies$

$$\implies \boxed{\begin{aligned} \exists\varphi_X^{(k)}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{i}X)^k e^{\mathbf{i}tX}\,\mathrm{d}F(x), \\ EX^k &= \frac{\varphi^{(k)}(0)}{\mathbf{i}^k} \end{aligned}}$$

КОНВЕРГЕНЦИЈЕ СЛУЧАЈНИХ ВЕКТОРА

• У расподели:

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{F}} X \iff F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)}$$

• У вероватноћи:

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} X \iff P\big\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\big\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

• Скоро сигурна:

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{сс}} X \iff P\{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X\} = 1}$$

• Средњеквадратна:

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ск}} X \iff E|X_n - X|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Важи:

$$\boxed{\left.\begin{matrix} \text{СС} \\ \text{СК} \end{matrix}\right\} \implies P \implies F}$$

[СС и СК су независне једна од друге!]

НЕЈЕДНАКОСТИ

- НЕЈЕДНАКОСТ ЧЕБИШЕВА

$$\boxed{P\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}}$$

$[r=2] \implies$

$$\implies P\{|X-EX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{E|X-EX|^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{биномна расподела,} \\ X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \\ S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} X_k, \\ ES_n = np \end{array}\right] \implies$$

$$\implies P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

[Бернулијева неједнакост]

- НЕЈЕДНАКОСТ КОЛМОГОРОВА

$$\boxed{P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}}$$

ЗАКОНИ ВЕЛИКИХ БРОЈЕВА

- СЛАБИ (ЧЕБИШЕВЉЕВ) ЗАКОН

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0 \\ \left(\begin{array}{c} \dfrac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0, \\ P\left\{\left|\dfrac{S_n - ES_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right) \end{array}}$$

- ЈАКИ (КОЛМОГОРОВЉЕВ) ЗАКОН

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{сс}} 0 \\ \left(\begin{array}{c} \dfrac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{сс}} 0, \\ P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{ES_n}{n}\right| = 0\right\} = 1 \end{array}\right) \end{array}}$$

- КРИТЕРИЈУМ ЧЕБИШЕВА

$X_1, \ldots, X_n$ независне СВ, $\boxed{\exists C \quad DX_k \leqslant C}$ $\implies$

$\implies$ важи *слаби* закон

- КРИТЕРИЈУМ КОЛМОГОРОВА

$X_1, \ldots, X_n$ независне СВ,

$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{DX_k}{k^2} < +\infty} \\ \boxed{\text{истих расподела и } EX < +\infty} \end{array}\right\} \implies$$

$\implies$ важи *јаки* закон

- ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{D\sum_{k=1}^{n} X_k}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{F}} Z \sim N(0,1). \\ \left(\dfrac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{F}} Z \sim N(0,1)\right) \end{array}}$$

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ СТАТИСТИКЕ

Популација — скуп који проучавамо

Узорак — део (подскуп) популације

Обележје — СВ, карактеристика елемента популације; *квантитативно* и *квалитативно* (последње је потребно кодирати у квантитативно)

Прост случајни узорак — сл. вектор $(X_1, \ldots, X_n)$; све X_k су независне и исте расподеле као и обележје X; n — *обим узорка*

Узорачка средина:

$$\boxed{\overline{X}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k}$$

Ако је узорак дат таблично, посматра се *реализована узорачка средина:*

$$\boxed{\overline{x}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n_k x_k,}$$

где је n_k број појављивања реализованог обележја x_k, $\sum n_k = n$.

Узорачка дисперзија:
Очекивање m је познато:

$$\boxed{\widehat{S}_n^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2}$$

Очекивање m није познато:

$$\boxed{\overline{S}_n^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2}$$

Реализована узорачка дисперзија:
Очекивање m је познато:

$$\boxed{\widehat{s}_n^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n_k(x_k - m)^2}$$

Очекивање m није познато:

$$\boxed{\overline{s}_n^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n_k(x_k - \overline{x}_n)^2}$$

Поправљена узорачка дисперзија:

$$\boxed{\widetilde{S}_n^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2}$$

РАСПОДЕЛЕ ОБЕЛЕЖЈА

- χ^2-РАСПОДЕЛА СА n СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(0,1) \implies \boxed{X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim \chi_n^2}$$

- СТУДЕНТОВА РАСПОДЕЛА СА n СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ

$$Y \sim N(0,1), \quad Z \sim \chi_k^2 \quad \text{независне} \implies$$
$$\implies \boxed{X = \frac{Y}{\sqrt{Z/n}} \sim t_n}$$

- ФИШЕРОВА РАСПОДЕЛА СА n, k СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ

$$Y \sim \chi_n^2, \quad Z \sim \chi_k^2 \quad \text{независне} \implies \boxed{X = \frac{Y/n}{Z/k} \sim F_{n,k}}$$

За $k = 1$ се добија Кошијева расподела, $f(x) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.

- ГАМА-РАСПОДЕЛА

$$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda), \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ X > 0,$$
$$f(x) = \frac{X^{\alpha-1}\cdot\lambda^{\alpha}\cdot e^{-\lambda X}}{\Gamma(\alpha)}$$

За $\alpha = 1$ се добија експоненцијална расподела, $X \sim E(\lambda)$.

- ГОТОВЕ ФОРМУЛЕ У ВЕЗИ СА РАСПОДЕЛАМА ОБЕЛЕЖЈА

$\boxed{1^\circ}$ $$\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1);$$

$\boxed{2^\circ}$ $$\frac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2;$$

$\boxed{3^\circ}$ $$\frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2;$$

$\boxed{4^\circ}$ $$\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\overline{S}_n^2}}\sqrt{n-1} \sim t_{n-1}.$$

(Ове формуле је доказао Фишер.)

ЗАКОНИ РАСПОДЕЛЕ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА*)

Закон расподеле	Ознака СВ и ЗР	Расподела (густина)	Веза између случајних величина	EX	DX
Бернулијев	$\mathrm{Be}(p)$	$p^k q^{1-k}, \quad k = 0, 1$	$\mathrm{Be}(p) = \mathrm{Bi}(1, p)$	p	pq
Бета	$B(\alpha, \beta)$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$	$B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha, 1)}{\Gamma(\alpha, 1) + \Gamma(\beta, 1)}$	$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
Биномни	$\mathrm{Bi}(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$	$\mathrm{Bi}(n, p) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Be}(p)$	np	npq
Негативан биномни	$\mathrm{NB}(n, p)$	$\binom{n+k-1}{k} p^n q^k, \quad k = 0, 1, \ldots$	$\mathrm{NB}(n, p) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{IG}_k(p)$	$(kq)/p$	$(kq)/p^2$
Гама	$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$\dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{e^{\lambda x}\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0$	$2\lambda \cdot \Gamma(\alpha, \lambda) = \chi^2(2\alpha)$	α/λ	α/λ^2
Геометријски	$\mathrm{Geom}(p)$	$p \cdot q^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$	$\mathrm{Geom}(p) = \mathrm{Pas}(1, p)$	$1/p$	q/p^2
Искључиви геометријски	$\mathrm{IG}(p)$	$p \cdot q^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$	$\mathrm{IG}(p) = \mathrm{NB}(1, p)$	q/p	q/p^2
Експоненцијални	$E(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$	$E(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Логаритамски нормални	$\mathrm{LN}(m, \sigma^2)$	$\dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0$	$\mathrm{LN}(m, \sigma^2) = \exp N(m, \sigma^2)$	$e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2m+\sigma^2} \cdot \left(e^{\sigma^2} - 1\right)$
Нормални	$N(m, \sigma^2)$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$	$N(m, \sigma^2) = \ln \mathrm{LN}(m, \sigma^2)$	m	σ^2
Паскалов	$\mathrm{Pas}(n, p)$	$\binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}, \quad k = n, n+1, \ldots$	$\mathrm{Pas}(n, p) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Geom}_k(p)$	k/p	$(kq)/p^2$
Поасонов	$\Pi(\lambda)$	$\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$	$\sum\limits_{k=1}^{n} \Pi(\lambda_k) = \Pi\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\Big)$	λ	λ
Равномерни (правоугаони)	$\left.\begin{matrix} R(a, b) \\ U(a, b) \end{matrix}\right\}$	$\dfrac{1}{b-a}, \quad a \leqslant x \leqslant b$	$R(a, b) = B(1, 1)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
χ^2 (Пирсонов)	$\chi^2(n)$	$\dfrac{1}{2^{(n/2)}\Gamma(n/2)} x^{(n/2)-1} e^{-x/2}, \quad x > 0$	$\chi^2(n) = \Gamma(n/2, 1/2)$	n	$2n$

*) Г. А. Соколов, И. М. Гладких: *Математическая статистика*, Экзамен, Москва, 2004.

ТАЧКАСТЕ ОЦЕНЕ ПАРАМЕТАРА

Расподела зависи од *параметра* θ:

$$f(x,\theta); \qquad F(x,\theta).$$

Ако се статистиком $g(X)$ оцењује параметар θ, онда се она назива *оценом параметра* θ и означава са $\widehat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} g(X)$.

• Непристрасност оцене

Оцена $\widehat{\theta}$ је *непристрасна* ако је

$$\boxed{E\widehat{\theta} = \theta \qquad \Big(\textit{асимптотски}\text{: } E\widehat{\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \theta\Big).}$$

• Постојаност оцене

Оцена $\widehat{\theta}$ је *постојана* ако је

$$\boxed{\widehat{\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} \theta \qquad \Big(P\{|\widehat{\theta}-\theta| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\Big).}$$

Важи:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\widehat{\theta}\ \text{непристрасна}\\ \wedge\ D\widehat{\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{\theta}\ \text{је постојана.}}$$

Скоро сигурна постојаност:

$$\boxed{\widehat{\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{сс}} \theta.}$$

Средњеквадратна постојаност:

$$\boxed{\widehat{\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{ск}} \theta.}$$

МЕТОД МАКСИМАЛНЕ ВЕРОДОСТОЈНОСТИ

Функција

$$L(X,\theta) = \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{n} f(X_k,\theta), & \text{расп. је непрекидна,}\\ \prod\limits_{k=1}^{n} P_\theta\{X=k\}, & \text{расп. је дискретна,}\end{cases}$$

назива се *функцијом веродостојности*.

Параметар θ се оцењује максимумом функције $L(X,\theta)$. Ако је $L(X,\theta) \in \mathscr{D}$, максимум се одређује преко нуле извода:

$$\widehat{\theta} = \theta \mid L'_\theta(X,\theta) = 0.$$

▸▸Ако L'_θ *нема нуле,* обично се задају границе СВ X у функцији од параметра. Тада се вредност $\widehat{\theta}$ одређује **из услова,** као вредност параметра θ за коју он важи, а истовремено је $L(X,\widehat{\theta})$ максимално. На пример: $X \in (0,\theta)$, $L(X,\theta) = 1/\theta$; $\widehat{\theta} = \max\limits_k X_k$, јер мора бити $\forall k \quad X_k \in (0,\widehat{\theta})$.

• **Интервали поверења за непознато математичко очекивање (m)**

▸▸*Позната је дисперзија* (σ^2):

Одређује се ε из

$$P\{|\overline{X}_n - m| \leqslant \varepsilon\} = \beta;$$

важи $\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$, па се z_β одређује из

$$\boxed{P\Big\{\Big|\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}\Big| \leqslant z_\beta\Big\} = \beta \text{ (таблице!)}, \quad z_\beta = \frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}.}$$

Интервал поверења је

$$\Big[\overline{X}_n - \frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sigma,\ \overline{X}_n + \frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sigma\Big].$$

▸▸Ако је *непозната дисперзија,* посматра се СВ:

$$\frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1} \sim t_{n-1}.$$

ИП се налази из услова

$$P\{|\overline{X} - m| \leqslant \varepsilon\} = \beta$$

и

$$\boxed{\begin{gathered}P\Big\{\Big|\frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}\Big| \leqslant t_{n-1;\beta}\Big\} = \beta \text{ (таблице!)},\\ \text{ИП: } \Big[\overline{X}_n - \frac{t_{n-1;1-\beta}}{\sqrt{n-1}}\overline{S}_n,\ \overline{X}_n + \frac{t_{n-1;1-\beta}}{\sqrt{n-1}}\overline{S}_n\Big].\end{gathered}}$$

. . . .

• **Интервали поверења за непознату вероватноћу у биномном закону**

▸▸*Непозната је вероватноћа* $p = P(A)$. Број реализација догађаја A у n експеримената има биномну расподелу, $S_n \sim \mathrm{Bi}(n,p)$. Вероватноћа се оцењује са $\overline{X}_n = S_n/n$.

ИП се одређује из услова

$$P\{|\overline{X}_n - p| \leqslant \varepsilon\} = \beta.$$

Важи $\dfrac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$, па је за $z_\beta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$:

$$\boxed{\begin{gathered}P\Big\{\Big|\frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\Big|\sqrt{n} \leqslant z_\beta\Big\} = \beta \text{ (таблице!)},\\ \text{ИП: } [p_1, p_2],\end{gathered}}$$

где су p_1, p_2 решења квадратне једначине

$$(n + z_\beta^2)p^2 - (2n\overline{X}_n + z_\beta^2)p + n\overline{X}_n^2 = 0.$$

• **Интервали поверења за непознату дисперзију (σ^2)**

▸▸*Познато је очекивање* (m):

$\dfrac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$, па се $b = \chi_{n;\beta}^2$ одређује из $\dfrac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} \geqslant b$:

$$\boxed{\begin{gathered}P\Big\{\frac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} \geqslant b\Big\} = \beta \text{ (таблице!)}, \quad \Big[0, \frac{n\widehat{S}_n^2}{\chi_{n;\beta}^2}\Big].\\ \text{(једнострани доњи ИП)}\end{gathered}}$$

Једнострани горњи ИП се налази из $\dfrac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} \leqslant c$. Из таблица налазимо $c = \chi_{n;1-\beta}^2$:

$$\boxed{P\Big\{\frac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} \leqslant c\Big\} = \beta, \quad \text{ИП: } \Big[\frac{n\widehat{S}_n^2}{\chi_{n;1-\beta}^2}, +\infty\Big).}$$

Двострани ИП се налази из услова $b \leqslant \dfrac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} \leqslant c$:

$$P\Big\{\frac{n\widehat{S}_n^2}{c} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{n\widehat{S}_n^2}{b}\Big\} = \beta,$$

што се замењује условима $\Big($ознаке су: $b = \chi_{n;\frac{1+\beta}{2}}^2$, $c = \chi_{n;\frac{1-\beta}{2}}^2\Big)$:

$$\boxed{\begin{gathered}P\Big\{\frac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} < b\Big\} = P\Big\{\frac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} > c\Big\} = \frac{1-\beta}{2} \text{ (таблице!)},\\ \text{двострани ИП: } \Big[\frac{n\widehat{S}_n^2}{\chi_{n;\frac{1-\beta}{2}}^2}, \frac{n\widehat{S}_n^2}{\chi_{n;\frac{1+\beta}{2}}^2}\Big].\end{gathered}}$$

▸▸*Непознато очекивање:* користи се $\overline{S}_n^2$ уместо $\widehat{S}_n^2$ и $b = \chi_{n-1;\beta}^2$, $c = \chi_{n-1;1-\beta}^2$.

• Основни појмови

▸▸ Нека расподела обележја X зависи од непознатог параметра θ. *Параметарска хипотеза* је претпоставка о непознатом параметру расподеле, а поступак њеног потврђивања или одбацивања на основу података из узорка је *параметарски тест*. Статистика која се користи у том поступку се назива *тест-статистика*.

▸▸ Хипотеза која се тестира се зове *нулта хипотеза* и означава са H_0. *Алтернативна хипотеза,* H_1, јој је супротстављена. Хипотеза је *проста* ако се односи на једну вредност параметра, којом је расподела потпуно одређена, нпр. $H_\theta(\theta=\theta_0)$. У супротном, хипотеза је *сложена.*

▸▸ *Грешка прве врсте* се чини ако се нулта хипотеза одбацује када је она тачна, а ако се она прихвата када је тачна алтернативна хипотеза, чини се *грешка друге врсте.*

▸▸ Тест је потпуно одређен критичном облашћу W_n, као скупом тачака $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, на следећи начин: ако реализовани узорак $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in W_n$, одбацује се H_0, а ако $(x_1,x_2,\dots,x_m)\notin W_n$, прихвата се H_0. Дакле, вероватноће грешака прве и друге врсте су:

$$\alpha=P_{H_0}\{(X_1,X_2,\dots,X_n)\in W_n\},$$
$$\beta=P_{H_1}\{(X_1,X_2,\dots,X_n)\notin W_n\}.$$

Број α се зове *праг (ниво) значајности.*

. . . .

• Тестирање хипотеза о математичком очекивању (m)

▸▸*Позната је дисперзија* σ^2*:* обележје X има *нормалну расподелу* $N(m,\sigma^2)$.

Ако је $H_0(m=m_0)$ тачна, $Z=\frac{\overline{X}_n-m_0}{\sigma}\sqrt{n}$ има нормалну расподелу, $N(0,1)$.

$\boxed{1^\circ}$ Одреде се границе критичне области:

$$P_{H_0}\{|\overline{X}_n-m_0|\geqslant\varepsilon\}=\alpha=P\{|Z|\geqslant c\},\qquad c=\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}.$$

Из таблица се налази $c=F^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$, па ε. Ако је $|\overline{x}_n-m_0|\geqslant\varepsilon$, тј.

$$\boxed{\overline{x}_n\in W=\left(-\infty,\ m_0-\varepsilon\right]\cup\left[m_0+\varepsilon,\ +\infty\right),}$$

одбацује се нулта хипотеза. Иначе се она прихвата.

$\boxed{2^\circ}$ Алтернативно, из таблица за нормалну расподелу се израчуна α^* (p-вредност) из

$$P_{H_0}\{|\overline{X}_n-m_0|\geqslant|\overline{x}_n-m_0|\}=$$
$$=P_{H_0}\left\{\frac{|\overline{X}_n-m_0|}{\sigma}\sqrt{n}\geqslant\frac{|\overline{x}_n-m_0|}{\sigma}\sqrt{n}\right\}=\alpha^*,$$

и ако је $\alpha^*<\alpha$, хипотеза се одбацује.

▸▸*Непозната дисперзија* σ^2*:* ако је нулта хипотеза $H_0(m=m_0)$ тачна, статистика $T=\frac{\overline{X}_n-m_0}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}$ има Студентову расподелу t_{n-1}.

Прво се за праг значајности α одреди критична област из услова

$$\boxed{\begin{aligned}&P\{|\overline{X}_n-m_0|\geqslant\varepsilon\}=\\&\quad=P_{H_0}\left\{\frac{|\overline{X}_n-m_0|}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}\geqslant\frac{\varepsilon}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}\right\}=\\&\quad\quad=P\{|T|\geqslant c\}=\alpha,\end{aligned}}$$

добије се $c=t_{n-1;\alpha}$, а онда се рачуна ε. Ако је $|\overline{x}_n-m_0|\geqslant\varepsilon$, одбацује се нулта хипотеза, иначе се прихвата.

• Тестирање хипотеза о дисперзији (σ^2)

▸▸*Познато очекивање* m*:* ако је хипотеза $H_0(\sigma^2=\sigma_0^2)$ тачна, статистика $\frac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma_0^2}$ има расподелу χ_n^2.

Област се одређује из услова

$$\boxed{P_{H_0}\left\{\frac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma_0^2}\leqslant\varepsilon_1\right\}=P_{H_0}\left\{\frac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma_0^2}\geqslant\varepsilon_2\right\}=\frac{\alpha}{2}.}$$

Из таблица за расподелу χ_n^2, добија се $\varepsilon_1=\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}$, $\varepsilon_2=\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}$. Ако је

$$\boxed{\frac{n\widehat{s}_n^2}{\sigma_0^2}\leqslant\varepsilon_1\quad\text{или}\quad\frac{n\widehat{s}_n^2}{\sigma_0^2}\geqslant\varepsilon_2,}$$

тада се одбацује нулта хипотеза, а иначе се прихвата.

▸▸*Непознато очекивање* m*:* исто као за познато, само што се користи $\overline{S}_n^2$ уместо $\widehat{S}_n^2$, и што тест-статистика има расподелу χ^2_{n-1}.

• Тестирање хипотеза о вероватноћи (p) у биномном закону расподеле

▸▸ Обележје X има биномну $\mathrm{Bi}(1,p)$ расподелу. Тестира се хипотеза $H_0(p=p_0)$. Дефинише се

$$Z\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\overline{X}_n-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}.$$

Ако је H_0 тачна и обим узорка је >30, статистика Z ће имати приближно нормалну нормирану расподелу. Из услова

$$\boxed{P_{H_0}\{|\overline{X}_n-p_0|\geqslant\varepsilon\}=P\{|Z|\geqslant\varepsilon\}=\alpha}$$

и таблица за $N(0,1)$ се налази c, а онда рачуна ε. Ако је $|\overline{x}_n-p_0|\geqslant\varepsilon$, нулта хипотеза се одбацује, а иначе се прихвата.

Нека је $H_0\big(F(x) = F_0(x)\big)$, и нека је у расподели обележја X непознато s параметара, који се на основу узорка оцењују ММВ. Скуп $\{X\}$ се раставља на r дисјунктних подскупова S_1, S_2, $\dots$, S_r. Нека је m_j број елемената из узорка који су у скупу S_j. Бројеви m_j су реализоване вредности СВ $M_j \underset{H_0}{\sim} \mathrm{Bi}(n, p_j)$, где је $p_j = P_{H_0}\{X \in S_j\}$. Вероватноће p_j се налазе из F_0. СВ M_j представља број чланова узорка који узимају вредност у скупу S_j (j је параметар за M_j).

У пракси се најчешће ради са примерима у којима су задате фреквенције реализованих вредности узорка, па се узима $M_j = n_j$, $p_j = F_0(x_j)$.

Тест-статистика је

$$\boxed{\chi_U^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(M_j - np_j)^2}{np_j}.}$$

Ако је хипотеза H_0 тачна, она има приближно расподелу χ^2_{r-s-1}. Из таблице се добија $c = \chi^2_{r-s-1;\alpha}$, тако да важи

$$\boxed{P\{\chi_U^2 \geqslant c\} = \alpha.}$$

Ако је реализована вредност тест-статистике већа од c, нулта хипотеза се одбацује, а иначе прихвата.

ТАБЛИЧНИ ПРЕГЛЕД ИНТЕРВАЛСКИХ ОЦЕНА

Тип проблема	Тест-статистика	Израз за таблично одређивање параметра	Резултат
Одређивање параметра θ	$\dfrac{\overline{X}_n - E_\theta \overline{X}_n}{\sqrt{D_\theta \overline{X}_n}} = Z_\theta \sim N(0,1)$	$P\{\lvert Z_\theta\rvert \leqslant z_\beta\} = \beta$	Интервал са границама одређеним решавањем $\lvert Z_\theta\rvert \leqslant z_\beta$ по θ
Непознато *очекивање* m Позната дисперзија σ^2	$\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} = Z \sim N(0,1)$	$P\{\lvert Z\rvert \leqslant z_\beta\} = \beta$	$\left[\overline{X}_n - \frac{z_\beta\,\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{X}_n + \frac{z_\beta\,\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
Непознато *очекивање* m Непозната дисперзија σ^2	$\dfrac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1} = T \sim t_{n-1}$	$P\{\lvert T\rvert \leqslant t_{n-1;\beta}\} = \beta$	$\left[\overline{X}_n - \frac{t_{n-1;1-\beta}\,\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}};\ \overline{X}_n + \frac{t_{n-1;1-\beta}\,\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}}\right]$
Непозната *дисперзија* σ^2 Познато очекивање m	$\dfrac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} = H \sim \chi_n^2$	$P\{H \geqslant b\} = \beta$ (д.); $P\{H \geqslant c\} = 1-\beta$ (г.) $P\{H < b\} = P\{H > c\} = \frac{1-\beta}{2}$ (двос.)	$\left[0;\ \frac{n\widehat{S}_n^2}{\chi^2_{n;\beta}}\right];\ \left[\frac{n\widehat{S}_n^2}{\chi^2_{n;1-\beta}};\ +\infty\right);\ \left[\frac{n\widehat{S}_n^2}{\chi^2_{n;\frac{1-\beta}{2}}};\ \frac{n\widehat{S}_n^2}{\chi^2_{n;\frac{1+\beta}{2}}}\right]$
Непозната *дисперзија* σ^2 Непознато очекивање m	$\dfrac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} = H \sim \chi_{n-1}^2$	– " –	$\left[0;\ \frac{n\overline{S}_n^2}{\chi^2_{n-1;\beta}}\right];\ \left[\frac{n\overline{S}_n^2}{\chi^2_{n-1;1-\beta}};\ +\infty\right);\ \left[\frac{n\overline{S}_n^2}{\chi^2_{n-1;\frac{1-\beta}{2}}};\ \frac{n\overline{S}_n^2}{\chi^2_{n-1;\frac{1+\beta}{2}}}\right]$
Разлика очекивања, $m_1 - m_2$ Непознате дисперзије, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\dfrac{(\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\left(n_1\overline{S}_{n_1}^2 + n_2\overline{S}_{n_2}^2\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}\sqrt{n_1 + n_2 - 2} = T \sim t_{n_1+n_2-2}$	$P\{\lvert T\rvert \geqslant c\} = 1-\beta$	$\Big[(\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) - \frac{t_{n_1+n_2-2;1-\beta}}{S};$ $(\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) + \frac{t_{n_1+n_2-2;1-\beta}}{S}\Big]$
Разлика очекивања, $m_1 - m_2$ Познате дисперзије, σ_1^2, σ_2^2	$\dfrac{(\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = Z \sim N(0,1)$	$P\{\lvert Z\rvert \leqslant z_\beta\} = \beta$	$\Big[(\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) - z_\beta\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}};$ $(\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}) + z_\beta\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\Big]$
Непозната *вероватноћа* p	$\dfrac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$	– " –	$[p_1, p_2]$; p_1, p_2 решења једначине $(n + z_\beta^2)p^2 - (2n\overline{X}_n + z_\beta^2)p + n\overline{X}_n^2 = 0$

ТАБЛИЧНИ ПРЕГЛЕД ТЕСТОВА ХИПОТЕЗА

Тип проблема	Тест-статистика	Израз за таблично одређивање параметра	Резултат (критична област)
$H_0(\theta = \theta_0)$			
Непознато *очекивање* m Позната дисперзија σ^2	$\dfrac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = Z \underset{H_0}{\sim} N(0,1)$	$P_{H_0}\{\lvert Z\rvert \geqslant c\} = \alpha$ $(c = \Phi^{-1}\big(\frac{1-\alpha}{2}\big))$	$\overline{x}_n \in \big(-\infty;\ m_0 - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\big] \cup \big[m_0 + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}};\ +\infty\big) \implies \cancel{H_0}$
Непознато *очекивање* m Непозната дисперзија σ^2	$\dfrac{\overline{X}_n - m_0}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1} = T \underset{H_0}{\sim} t_{n-1}$	$P_{H_0}\{\lvert T\rvert \geqslant c\} = \alpha$ $(c = t_{n-1;\alpha})$	$\overline{x}_n \in \big(-\infty;\ m_0 - \frac{c\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}}\big] \cup \big[m_0 + \frac{c\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}};\ +\infty\big) \implies \cancel{H_0}$
Непозната *дисперзија* σ^2 Познато очекивање m	$\dfrac{n\widehat{S}_n^2}{\sigma_0^2} = H \underset{H_0}{\sim} \chi_n^2$	$P_{H_0}\{H \leqslant \varepsilon_1\} = P_{H_0}\{H \geqslant \varepsilon_2\} = \frac{\alpha}{2}$	$H \in (-\infty;\ \varepsilon_1] \cup [\varepsilon_2;\ +\infty) \implies \cancel{H_0}$
Непозната *дисперзија* σ^2 Непознато очекивање m	$\dfrac{n\overline{S}_n^2}{\sigma_0^2} = H \underset{H_0}{\sim} \chi_{n-1}^2$	– ” –	– ” –
Једнакост *очекивања* Непознате дисперзије $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\dfrac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{(n_1\overline{S}_{n_1}^2 + n_2\overline{S}_{n_2}^2)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}\sqrt{n_1 + n_2 - 2} = T \underset{H_0}{\sim} t_{n_1+n_2-2}$	$P_{H_0}\{\lvert T\rvert \geqslant c\} = \alpha$	$T \in (-\infty;\ -\lvert c\rvert] \cup [\lvert c\rvert;\ +\infty) \implies \cancel{H_0}$
Једнакост *очекивања* Познате дисперзије σ_1^2, σ_2^2	$\dfrac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = Z \underset{H_0}{\sim} N(0,1)$	$P_{H_0}\{\lvert Z\rvert \geqslant c\} = \alpha$	$Z \in (-\infty;\ -\lvert c\rvert] \cup [\lvert c\rvert;\ +\infty) \implies \cancel{H_0}$
Једнакост *дисперзија* Позната очекивања m_1, m_2	$\dfrac{\widehat{S}_{n_1}^2/\sigma_1^2}{\widehat{S}_{n_2}^2/\sigma_2^2} = \dfrac{\widehat{S}_{n_1}^2}{\widehat{S}_{n_2}^2} = F \underset{H_0}{\sim} F_{n_1,n_2}$	$P_{H_0}\{F \leqslant c_1\} = P_{H_0}\{F \geqslant c_2\} = \frac{\alpha}{2}$ $(c_1 = F_{n_1,n_2;\frac{\alpha}{2}};\ c_2 = F_{n_1,n_2;1-\frac{\alpha}{2}})$	$F \in (0;\ c_1] \cup [c_2;\ +\infty) \implies \cancel{H_0}$
Једнакост *дисперзија* Непозната очекивања m_1, m_2	$\dfrac{\overline{S}_{n_1}^2/\sigma_1^2}{\overline{S}_{n_2}^2/\sigma_2^2} = \dfrac{\overline{S}_{n_1}^2}{\overline{S}_{n_2}^2} = F \underset{H_0}{\sim} F_{n_1-1,n_2-1}$	$P_{H_0}\{F \leqslant c_1\} = P_{H_0}\{F \geqslant c_2\} = \frac{\alpha}{2}$ $(c_1 = F_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}};\ c_2 = F_{n_1-1,n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}})$	– ” –
Непозната *вероватноћа* p	$\dfrac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = Z \underset{H_0}{\sim} N(0,1)$	$P_{H_0}\{\lvert Z\rvert \geqslant c\} = \alpha$	$Z \in (-\infty;\ -\lvert c\rvert] \cup [\lvert c\rvert;\ +\infty) \implies \cancel{H_0}$

ИЗВОРИ

[1] Vesna Jevremović: *Verovatnoća i statistika,* Matematički fakultet, Beograd, 2009.

[2] А. И. Кибзун, Е. Р. Горяинова, А. В. Наумов: *Теория вероятностей и математическая статистика,* Физматлит, Москва, 2005.

[3] Павле Младеновић: *Вероватноћа и статистика,* Математички факултет, Београд, 2008.

[4] Г. А. Соколов, И. М. Гладких: *Математическая статистика,* Экзамен, Москва, 2004.

[5] В. П. Чистяков: *Курс теории вероятностей,* Дрофа, Москва, 2007.